第30講　領域と最大最小問題

30　4つの不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad 3x+4y \leqq 35,\quad 4x+3y \leqq 35$$

で表される領域を D とし，不等式 $x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ で表される領域を E とする．

(1)　領域 D と領域 E の共通部分を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$4x+5y$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$y-ax$ の最大値を求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　領域と最大最小問題

30 次の一組の 1 次不等式

$$x+y\leqq 7,\quad x+2y\leqq 10,\quad 0\leqq x\leqq 6,\quad 0\leqq y\leqq 4$$

の表す領域を考える．

以下の [a]〜[k] に当てはまる数字をそれぞれ答えよ．

(1)　この領域の中で関数 $2x+3y$ の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($ [a] , [b] $)$ である．

(2)　この領域の中で関数 $(2-t)x+(3-t)y$ の値を最大にする点 $(x,\ y)$ の集合は，t の値を 0 から増加させることによって変化する．

$0\leqq t<$ [c] のとき，関数の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($ [a] , [b] $)$,

[c] $<t<$ [d] のとき，関数の値を最大にする点 P_2 の座標は

$(x,\ y)=($ [e] , [f] $)$,

[d] $<t<$ [g] のとき，関数の値を最大にする点 P_3 の座標は

$(x,\ y)=($ [h] , [i] $)$,

[g] $<t$ のとき，関数の値を最大にする点 P_4 の座標は

$(x,\ y)=($ [j] , [k] $)$

である．ただし，P_1，P_2，P_3，P_4 は相異なる点である．

【選択肢】

(1) (a) ㋐ 6 ㋑ 4 ㋒ 2　(b) ㋐ 1 ㋑ 4 ㋒ 3

(2) (c) ㋐ 1 ㋑ 2 ㋒ 3　(d) ㋐ 2 ㋑ 5 ㋒ 3

(e) ㋐ 6 ㋑ 2 ㋒ 4　(f) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 1

(g) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 7　(h) ㋐ 4 ㋑ 6 ㋒ 0

(i) ㋐ 0 ㋑ 4 ㋒ 6　(j) ㋐ 0 ㋑ 6 ㋒ 7

(k) ㋐ 5 ㋑ 4 ㋒ 0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　領域と最大最小問題

30　4 つの不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad 3x+4y \leqq 35, \quad 4x+3y \leqq 35$$

で表される領域を D とし，不等式 $x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ で表される領域を E とする．

(1)　領域 D と領域 E の共通部分を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$4x+5y$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D と領域 E の共通部分を動くとき，$y-ax$ の最大値を求めよ．ただし，a は実数の定数とする．

【答】　(1) 略　(2) 最大値 45，最小値 $45-5\sqrt{41}$

(3) 最大値 $\begin{cases} 5-5a+5\sqrt{a^2+1} & \left(a \geqq \dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \\ 8-a & \left(-\dfrac{3}{4} \leqq a < \dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \\ 5-5a & \left(-\dfrac{4}{3} \leqq a < -\dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 1-8a & \left(a < -\dfrac{4}{3} \text{ のとき}\right) \end{cases}$

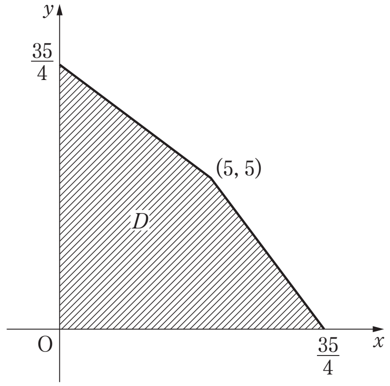
【解答】

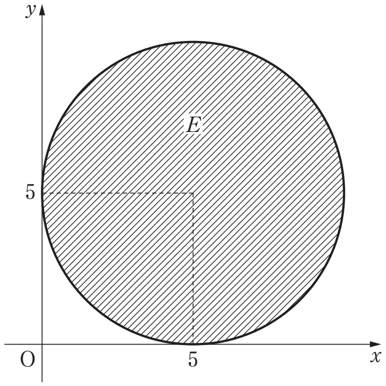
(1)　$3x+4y \leqq 35$ より $y \leqq -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{35}{4}$，$4x+3y \leqq 35$ より $y \leqq -\dfrac{4}{3}x+\dfrac{35}{3}$

よって領域 D は左下図の斜線部分（境界を含む）．

$x^2+y^2-10x-10y+25 \leqq 0$ より $(x-5)^2+(y-5)^2 \leqq 25$

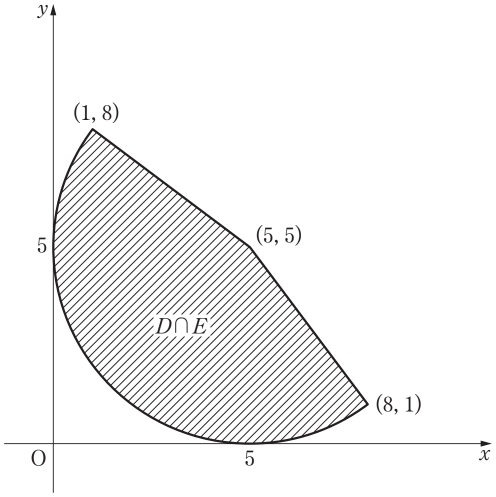
よって領域 E は右下図の斜線部分（境界を含む）．





ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって領域 D と領域 E の共通部分は下図の斜線部分（境界を含む）.



(2)　$4x+5y=k$ とおく．直線 $y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{k}{5}$ が領域 D と領域 E の共通部分と共有点をもつような k の値を考えればよい.

$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき k は最大値　$k=4x+5y=4\cdot5+5\cdot5=\mathbf{45}$　をとる.

また，直線 $4x+5y-k=0$ と円 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ が接し，かつ y 切片 $\dfrac{k}{5}$ が $\dfrac{k}{5}<5$ を満たしているとき k は最小となるので

$$\frac{|4\cdot5+5\cdot5-k|}{\sqrt{4^2+5^2}}=5,\qquad \frac{k}{5}<5$$

$$\therefore\quad k=45\pm5\sqrt{41},\qquad k<25$$

よって　$k=\mathbf{45-5\sqrt{41}}$　が最小値である.

(3)　$y-ax=k$ とおく．直線 $y=ax+k$ が領域 D と領域 E の共通部分と共有点をもつような k の値を考えればよい.

(Ⅰ)　$a\geqq\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $ax-y+k=0$ と円が接し，y 切片 k が $k>0$ であるとき k は最大となるので

$$\frac{|a\cdot5-5+k|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5\ (k>0)$$

$$\therefore\quad k=5-5a+5\sqrt{a^2+1}$$

(Ⅱ)　$-\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 $(1,\ 8)$ を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=8-a$

(Ⅲ)　$-\dfrac{4}{3}\leqq a<-\dfrac{3}{4}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 $(5,\ 5)$ を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=5-5a$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅳ)　$a<-\dfrac{4}{3}$ のとき，直線 $y=ax+k$ が点 (8，1) を通るとき k は最大となるので，そのときの最大値は　$k=y-ax=1-8a$

以上より，最大値は $\begin{cases} 5-5a+5\sqrt{a^2+1} & \left(a\geqq\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \\ 8-a & \left(-\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \\ 5-5a & \left(-\dfrac{4}{3}\leqq a<-\dfrac{3}{4}\text{ のとき}\right) \\ 1-8a & \left(a<-\dfrac{4}{3}\text{ のとき}\right) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　領域と最大最小問題

30 次の一組の 1 次不等式

$$x+y \leqq 7, \quad x+2y \leqq 10, \quad 0 \leqq x \leqq 6, \quad 0 \leqq y \leqq 4$$

の表す領域を考える．

以下の [a]～[k] に当てはまる数字をそれぞれ答えよ．

(1) この領域の中で関数 $2x+3y$ の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($ [a] , [b] $)$ である．

(2) この領域の中で関数 $(2-t)x+(3-t)y$ の値を最大にする点 $(x,\ y)$ の集合は，t の値を 0 から増加させることによって変化する．

$0 \leqq t <$ [c] のとき，関数の値を最大にする点 P_1 の座標は

$(x,\ y)=($ [a] , [b] $)$,

[c] $< t <$ [d] のとき，関数の値を最大にする点 P_2 の座標は

$(x,\ y)=($ [e] , [f] $)$,

[d] $< t <$ [g] のとき，関数の値を最大にする点 P_3 の座標は

$(x,\ y)=($ [h] , [i] $)$,

[g] $< t$ のとき，関数の値を最大にする点 P_4 の座標は

$(x,\ y)=($ [j] , [k] $)$

である．ただし，P_1，P_2，P_3，P_4 は相異なる点である．

【選択肢】

(1) (a) ㋐ 6 ㋑ 4 ㋒ 2　(b) ㋐ 1 ㋑ 4 ㋒ 3

(2) (c) ㋐ 1 ㋑ 2 ㋒ 3　(d) ㋐ 2 ㋑ 5 ㋒ 3

(e) ㋐ 6 ㋑ 2 ㋒ 4　(f) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 1

(g) ㋐ 4 ㋑ 3 ㋒ 7　(h) ㋐ 4 ㋑ 6 ㋒ 0

(i) ㋐ 0 ㋑ 4 ㋒ 6　(j) ㋐ 0 ㋑ 6 ㋒ 7

(k) ㋐ 5 ㋑ 4 ㋒ 0

【答】 (1) (a) ㋑ (b) ㋒

(2) (c) ㋐ (d) ㋐ (e) ㋑ (f) ㋐ (g) ㋑ (h) ㋒ (i) ㋑ (j) ㋐ (k) ㋒

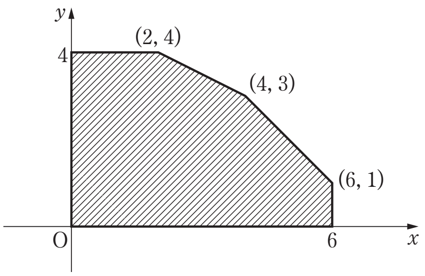
【解答】

(1) 与式より

$$\begin{cases} y \leqq -x+7 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+5 \\ 0 \leqq x \leqq 6 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，与式の表す領域は下図の斜線部の六角形の周及び内部である．



⑴　$2x+3y=k$ とおくと

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}k \quad \cdots\cdots \text{（傾き }-\frac{2}{3}\text{ の直線）}$$

よって k は直線が点 **(4, 3)** を通るとき最大となる．

⑵　$(2-t)x+(3-t)y=k$ とおくと，$3-t\neq 0$ のとき

$$y=\frac{t-2}{3-t}x+\frac{k}{3-t}$$

まず，(Ⅰ) $3-t>0$ すなわち $t<3$ のときは，k が最大のとき y 切片 $\frac{k}{3-t}$ も最大となるので，傾き $\frac{t-2}{3-t}$ に着目して考えると，

(Ⅰ-1)　$\frac{t-2}{3-t}>0$ すなわち $2<t<3$ のとき k は点 (0, 4) で最大となる．

(Ⅰ-2)　$-\frac{1}{2}<\frac{t-2}{3-t}<0$ すなわち $1<t<2$ のとき k は点 (2, 4) で最大となる．

(Ⅰ-3)　$-1<\frac{t-2}{3-t}<-\frac{1}{2}$ すなわち $t<1$ のとき k は点 (4, 3) で最大となる．

(Ⅰ-4)　$\frac{t-2}{3-t}<-1$ は $\frac{t-2}{3-t}=-1+\frac{1}{3-t}>-1$ より $3-t>0$ に矛盾する．

次に，(Ⅱ) $3-t<0$ すなわち $t>3$ のときは，k が最大のとき y 切片 $\frac{k}{3-t}$ は最小となり，このとき

$$\text{傾き }\frac{t-2}{3-t}=-1+\frac{1}{3-t}<-1$$

より，k は点 (0, 0) で最大となる．

(Ⅰ)〜(Ⅱ)より整理すると，k の値を最大にする点の座標は

$$\begin{cases} 0\leqq t<\mathbf{1} \text{ のとき} & \mathrm{P}_1(\mathbf{4},\ \mathbf{3}) \\ \mathbf{1}<t<\mathbf{2} \text{ のとき} & \mathrm{P}_2(\mathbf{2},\ \mathbf{4}) \\ \mathbf{2}<t<\mathbf{3} \text{ のとき} & \mathrm{P}_3(\mathbf{0},\ \mathbf{4}) \\ \mathbf{3}<t \text{ のとき} & \mathrm{P}_4(\mathbf{0},\ \mathbf{0}) \end{cases}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。